Modelli deterministici: come stimarne l’incertezza?

Marco Bajo, Georg Umgiesser

ISMAR-CNR Venezia

Sommario

- Predicibilità di un sistema;
- Modelli deterministici;
- Fonti di errore;
- Quantificazione degli errori e assimilazione dati;
- Metodi di ensemble forecast;
- Ensemble forecast e assimilazione;
- Predicibilità ed evoluzione degli errori;
- Metodi decisionali basati su previsione probabilistica;
- Conclusioni.

Predicibilità di un sistema

Edward Lorenz (1917 – 2008)

Da: Sarah Keeley, ECMWF

La predicibilità di un sistema dipende dalla sua non-linearità e dallo stato iniziale in cui si trova.
Se il sistema è non-lineare (atmosfera, oceano) stati iniziali più vicini dell'errore con cui sono noti possono divergere notevolmente nel tempo.

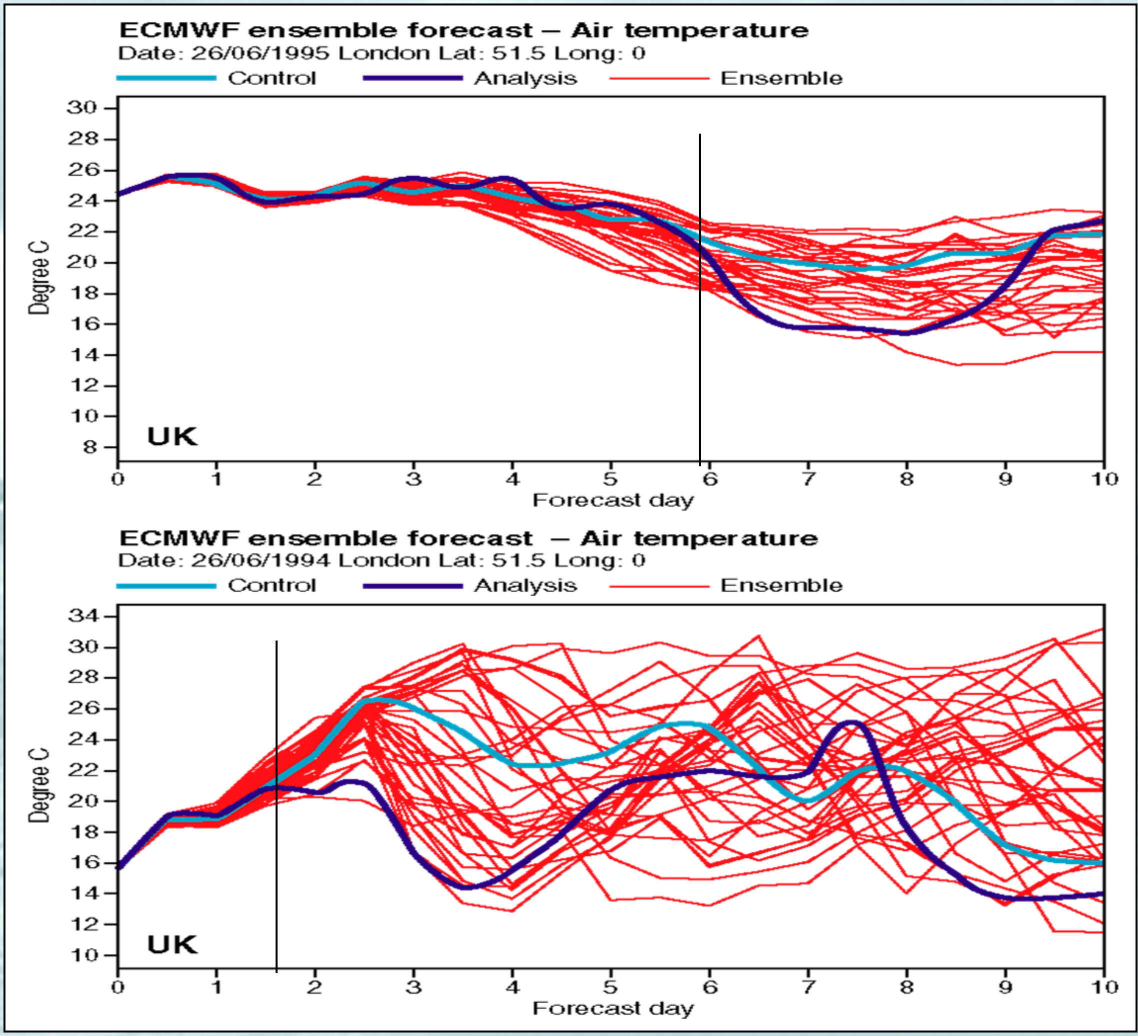
Equazioni 2D convezione termica

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y + f$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y + f$$

$$\dot{Z} = XY - bZ$$

Predicibilità di un sistema



Esempio reale di previsione della <u>temperatura dell'aria</u> in due giorni diversi.

L'ensemble di previsioni, in rosso, parte da stati iniziali leggermente diversi.

In viola l'analisi (simile a osservazioni) e in azzurro la previsione deterministica tradizionale.

Da: Sarah Keeley, ECMWF

Come funzionano i modelli deterministici?

Navier–Stokes Equations

3 – dimensional – unsteady

Coordinates: (x,y,z) Time : t Density: ρ Pressure: p Reynolds Number: Re

Velocity Components: (u,v,w) Stress: τ Heat Flux: q Prandtl Number: Pr

Continuity:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0$$

X – Momentum:

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u w)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re_r}\left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right]$$

Y – Momentum:

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v w)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re_r}\left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right]$$

Z – Momentum:

$$\frac{\partial (\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u w)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v w)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re_r}\left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right]$$

Total Energy – Et:

$$\frac{\partial (E_T)}{\partial t} + \frac{\partial (u E_T)}{\partial x} + \frac{\partial (v E_T)}{\partial y} + \frac{\partial (w E_T)}{\partial z} = -\frac{\partial (u p)}{\partial x} - \frac{\partial (v p)}{\partial y} - \frac{\partial (w p)}{\partial z}$$

$$+ \frac{1}{Re_r}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u\,\tau_{xx} + v\,\tau_{xy} + w\,\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(u\,\tau_{xy} + v\,\tau_{yy} + w\,\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(u\,\tau_{xz} + v\,\tau_{yz} + w\,\tau_{zz})\right]$$

$$- \frac{1}{Re_r Pr_r}\left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right]$$

Le equazioni che descrivono il moto in atmosfera ed oceano sono note e derivano dalle <u>leggi di conservazione</u> del momento, della massa e dell'energia.

Sebbene non siano risolvibili analiticamente, si possono <u>discretizzare</u> e risolvere in una grigla di calcolo.

Come funzionano i modelli deterministici?

Le equazioni vengono semplificate e risolte in modo numerico su di una griglia di calcolo.

Equazioni di shallow-water bidimensionali

$$\frac{\partial U}{\partial x} - fV = -Hg\left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{\rho_w}\frac{\partial p_a}{\partial x}\right] + A_H \Delta U + \frac{1}{\rho_w}\left(\tau_{wx} - \tau_{bx}\right)$$

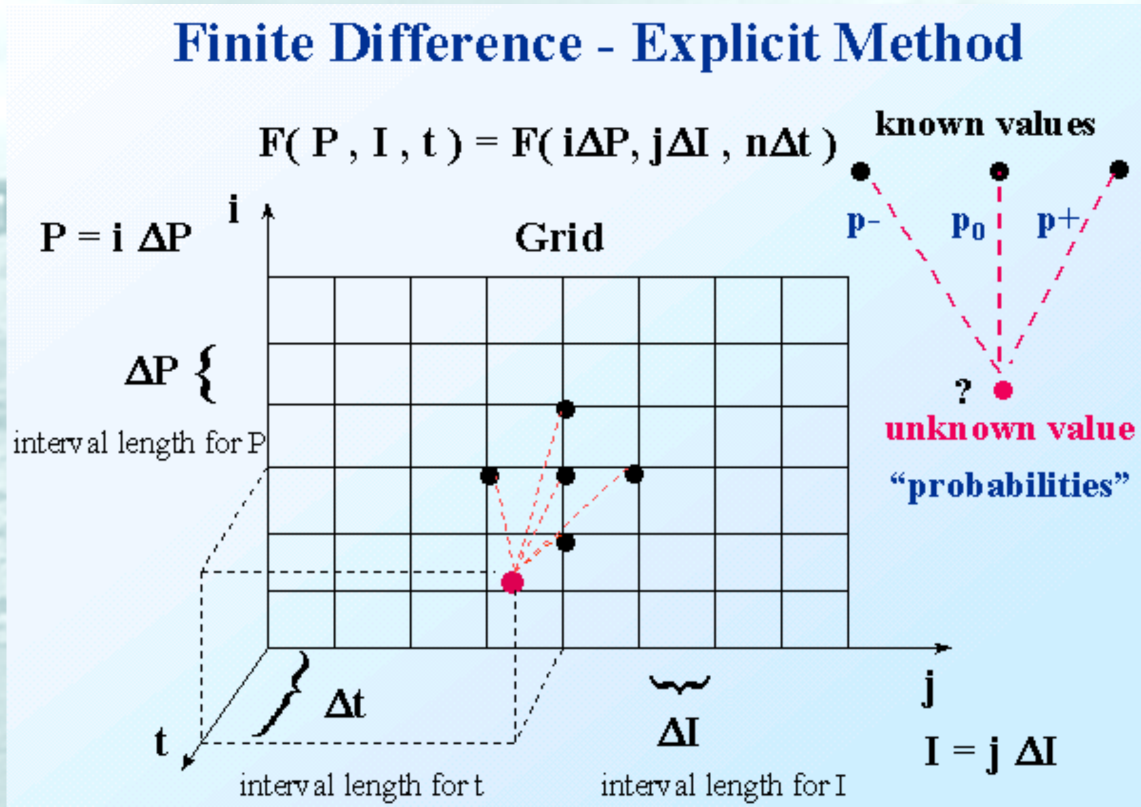
$$\frac{\partial V}{\partial y} + fU = -Hg\left[\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{\rho_w}\frac{\partial p_a}{\partial y}\right] + A_H \Delta V + \frac{1}{\rho_w}\left(\tau_{wy} - \tau_{by}\right)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

Come funzionano i modelli deterministici?

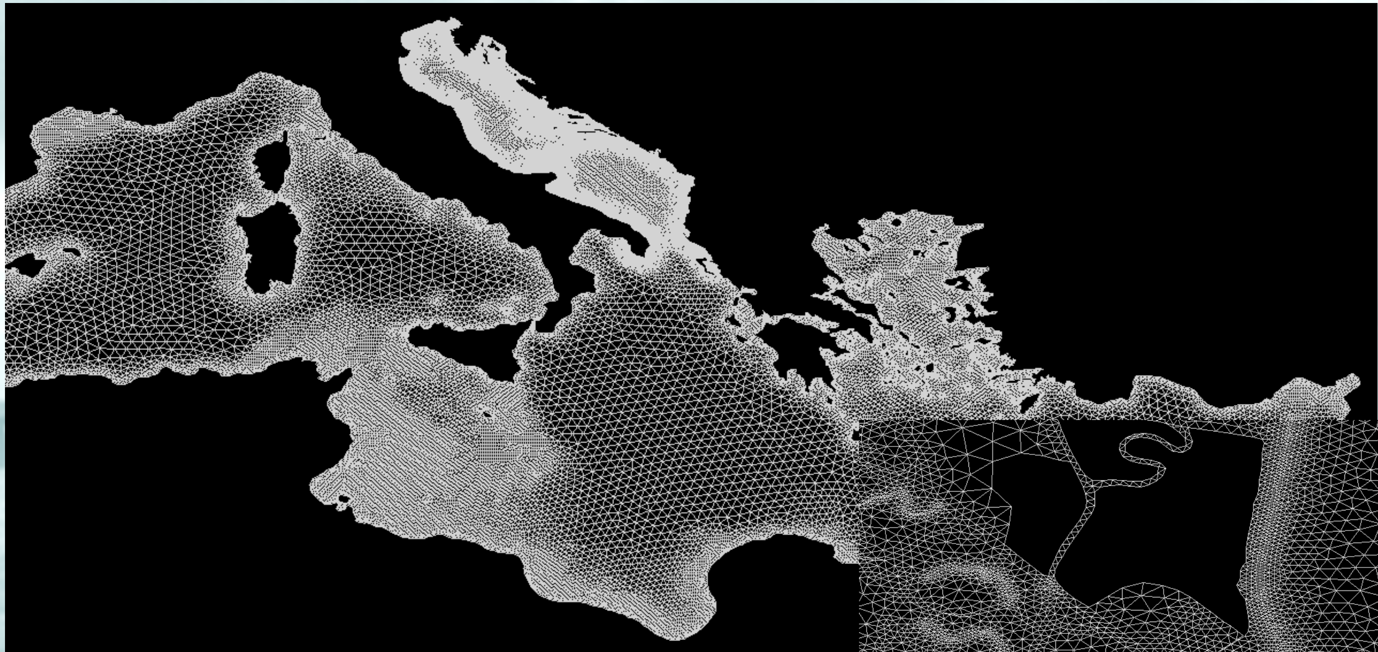
Le derivate vengono calcolate come differenze finite tra nodi di una griglia

Differenze finite

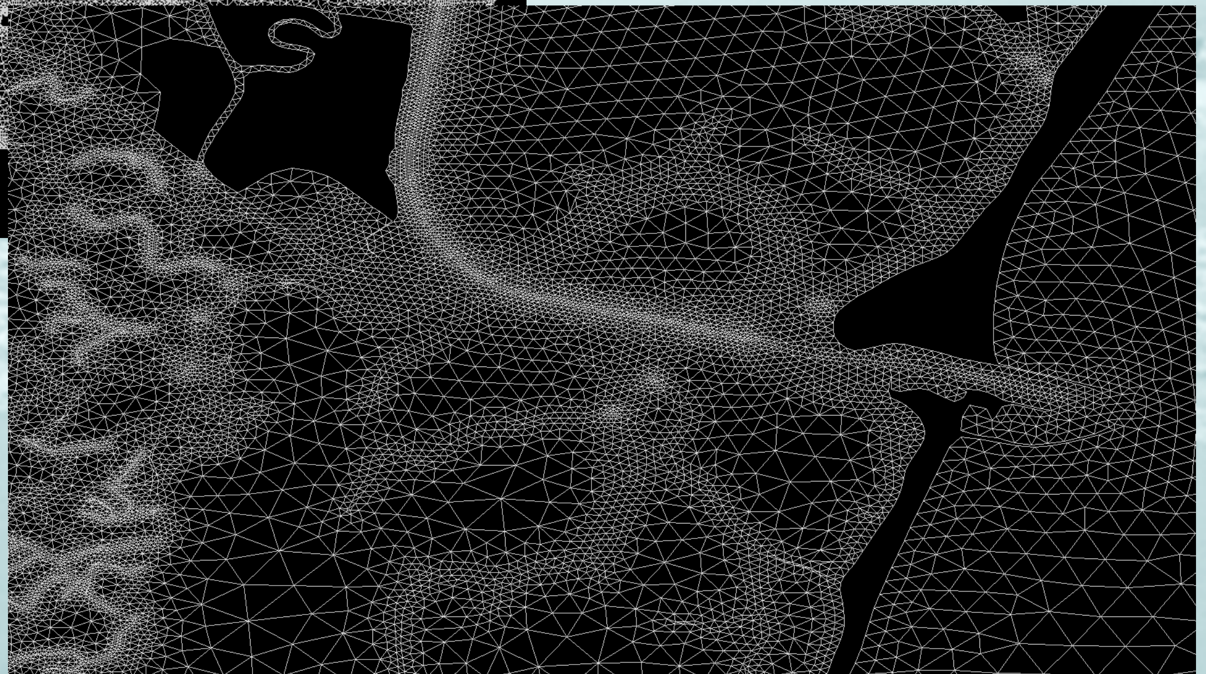


Come funzionano i modelli deterministici?

Elementi finiti



Esistono molti metodi numerici per discretizzare le equazioni del moto



Il medodo agli elementi finiti consente una variazione spaziale della risoluzione:
- migliore rappresentazione di coste e batimetrie;
- minor numero di elementi richiesto.

Fonti di errore

I modelli numerici hanno bisogno di alcune informazioni al contorno e all'istante iniziale. Per un modello oceanografico:

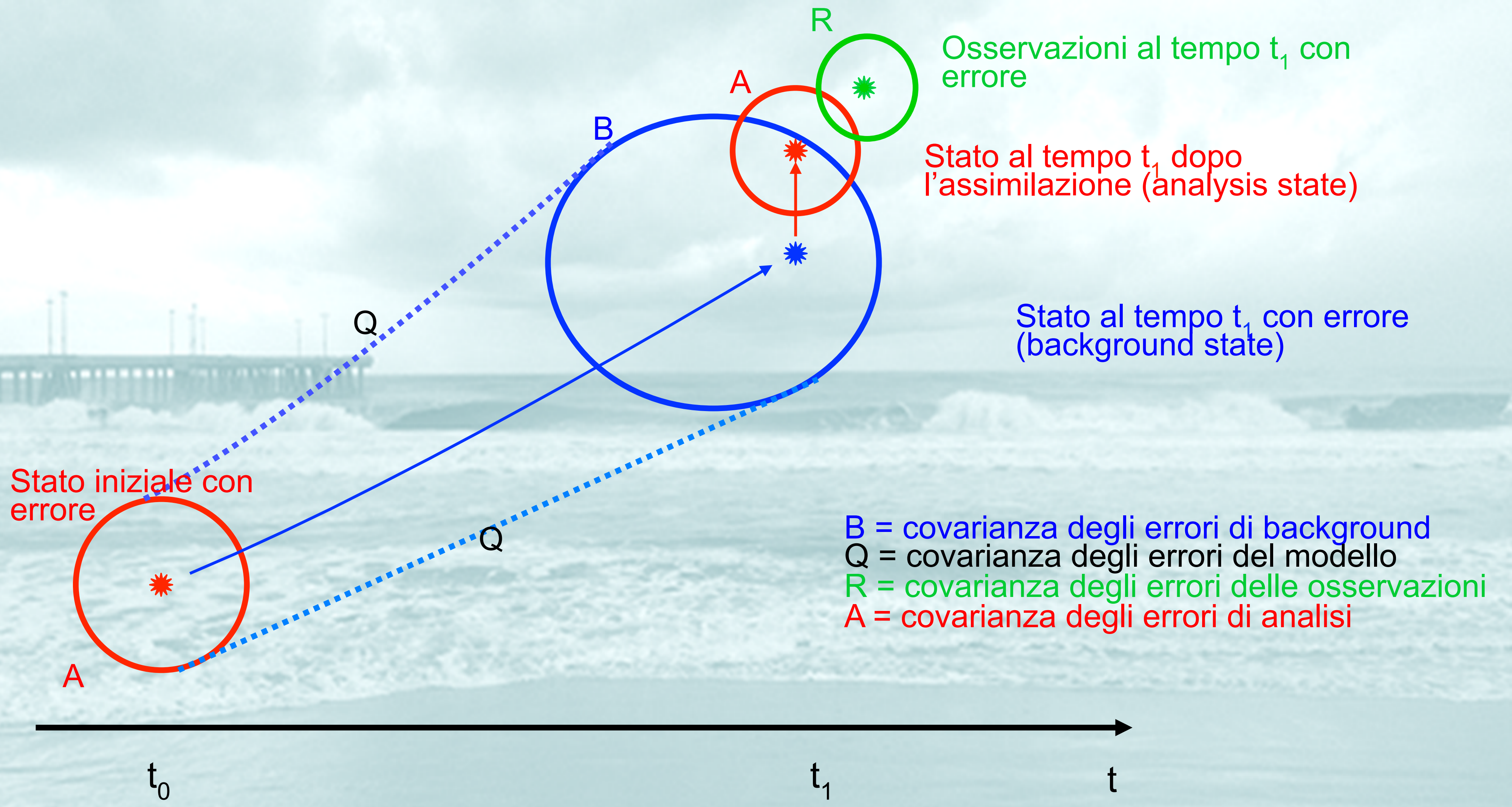
- condizioni ai bordi aperti (livello, flussi, ...);
- condizioni all'interfaccia (vento, pressione, …);
- stato iniziale del sistema. Valore delle variabili al tempo $t = 0$

Le condizioni al contorno non sono note con esattezza, inoltre il modello commette errori a causa del fatto che è discreto e che contiene molte parametrizzazioni e approssimazioni.

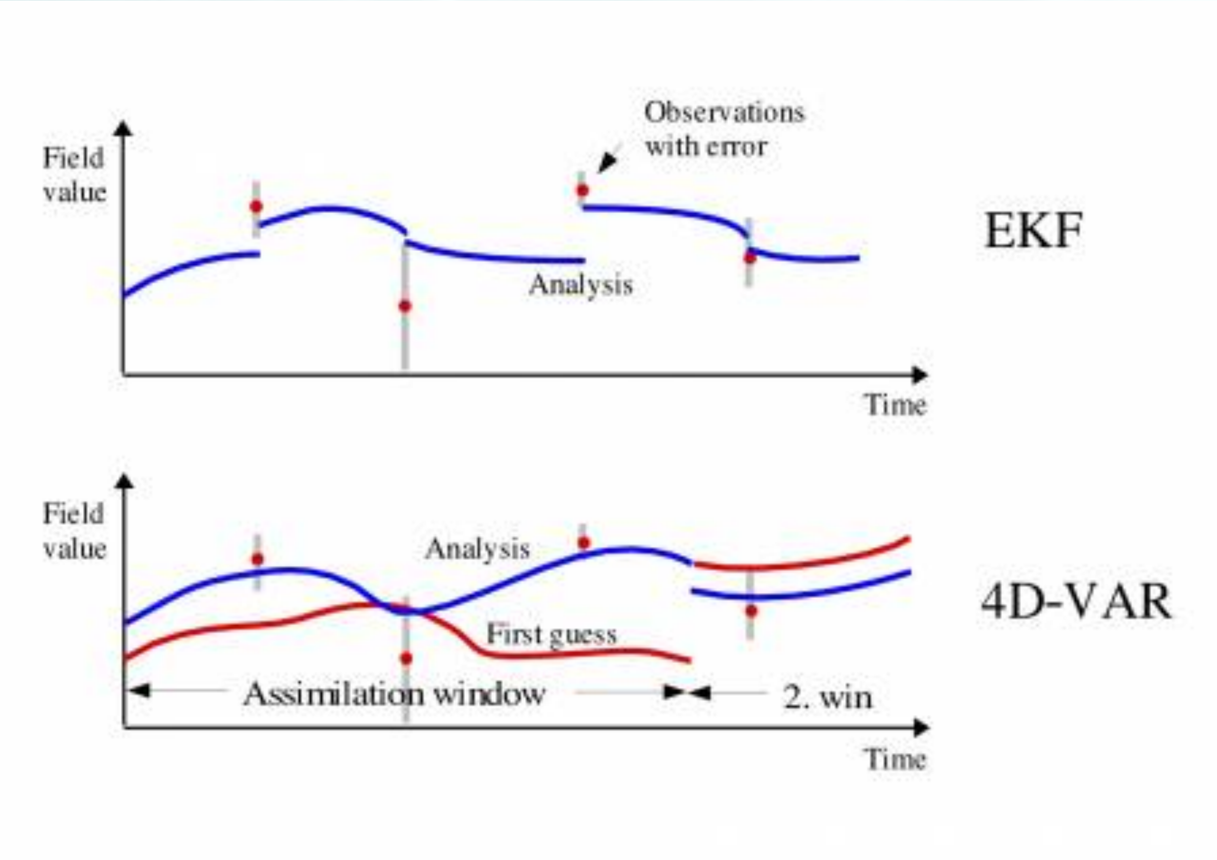
<u>Tutti questi errori vengono in genere considerati errore del modello (E_m)</u>

<u>Anche lo stato iniziale non è mai noto alla perfezione e contiene un errore, denominato E_B.</u>

Quantificazione errori e assimilazione dati



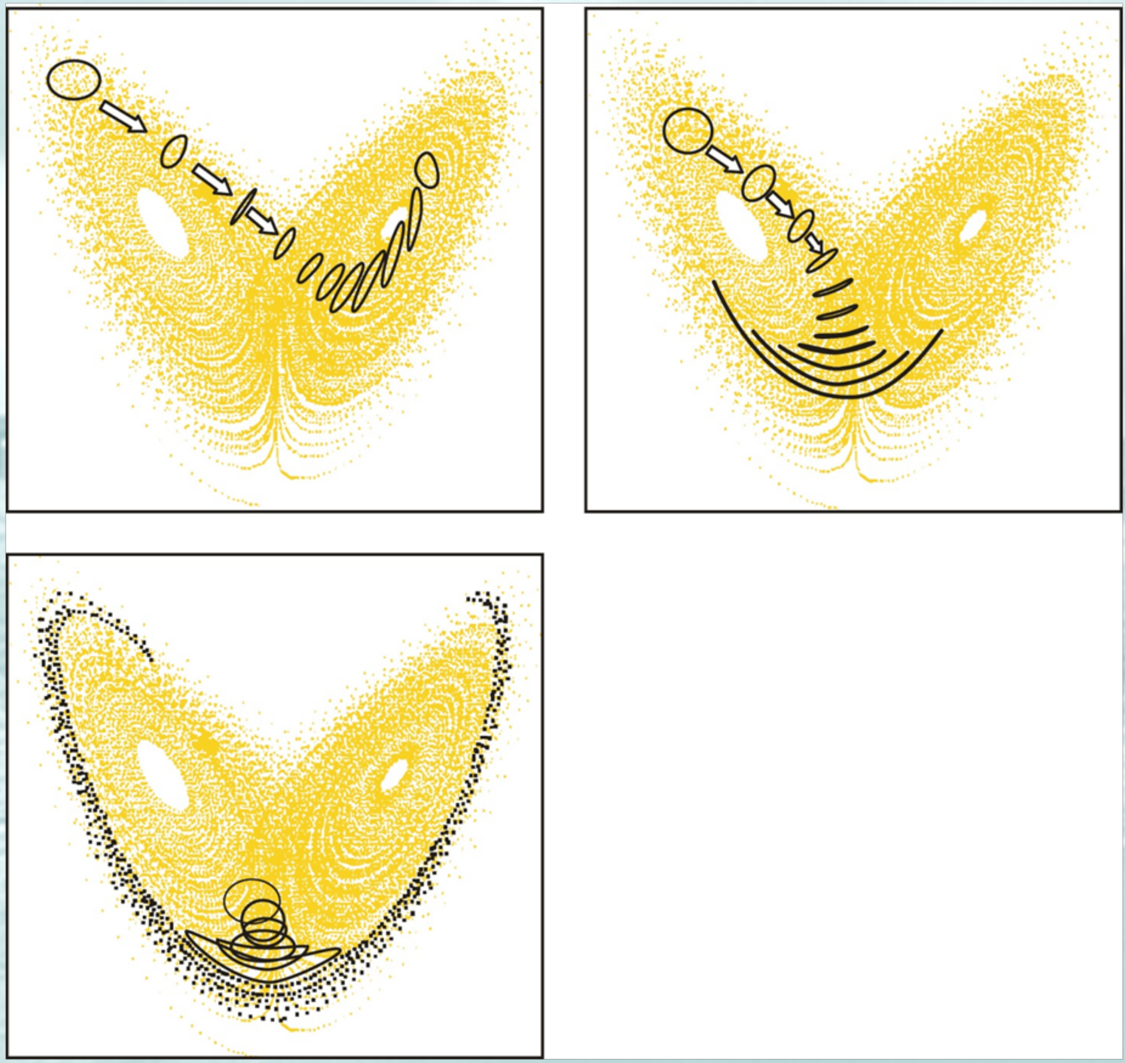
Quantificazione errori e assimilazione dati



Metodo sequenziale:
Minimizza gli errori ad
ogni osservazione

Metodo non-sequenziale:
minimizza gli errori in una
finestra temporale

Predicibilità ed evoluzione degli errori

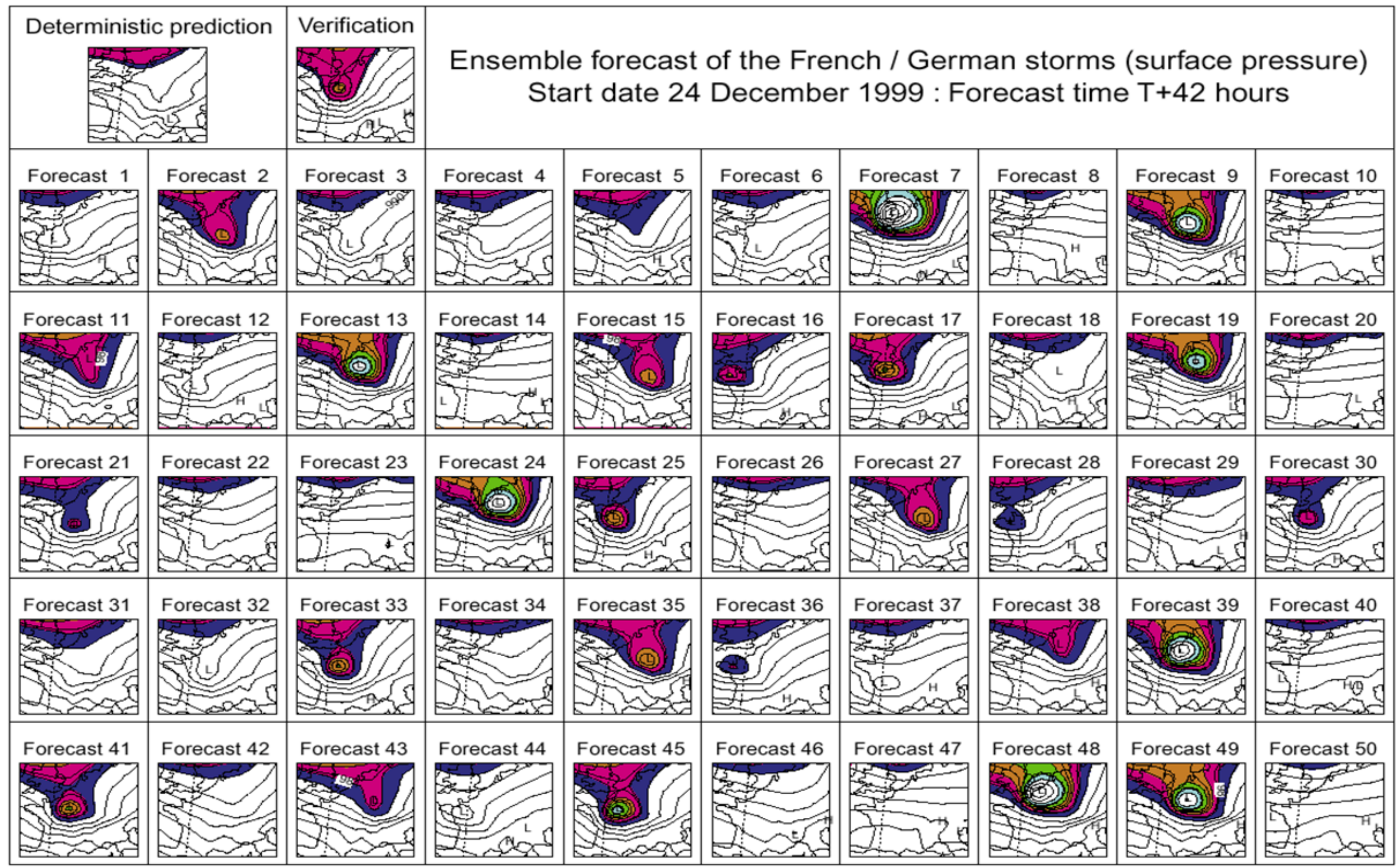


Il sistema di Lorentz è un ottimo esempio di come un errore iniziale piccolo può crescere nel tempo, ovvero con la lunghezza della previsione.

Predicibilità ed evoluzione degli errori

Lothar (T+42 hours)

Da: Sarah Keeley, ECMWF

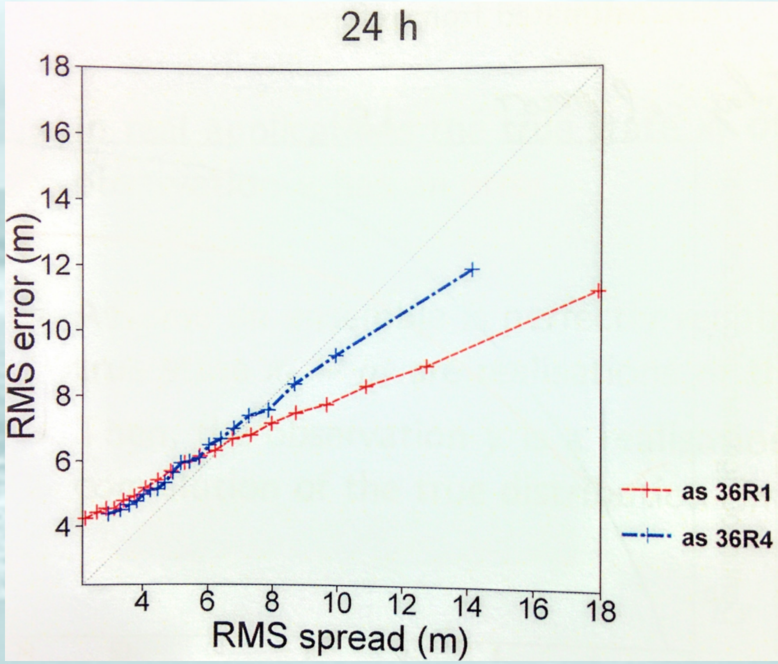


Metodi di ensemble

L'idea è quella di eseguire N corse del modello variando leggermente alcuni parametri (stato iniziale, forzanti, condizioni al contorno, parametri interni, ...)

Affinchè il sistema di ensemble sia **affidabile** le perturbazioni devono creare un ensemble con una larghezza (spread) né troppo grande né troppo piccola.

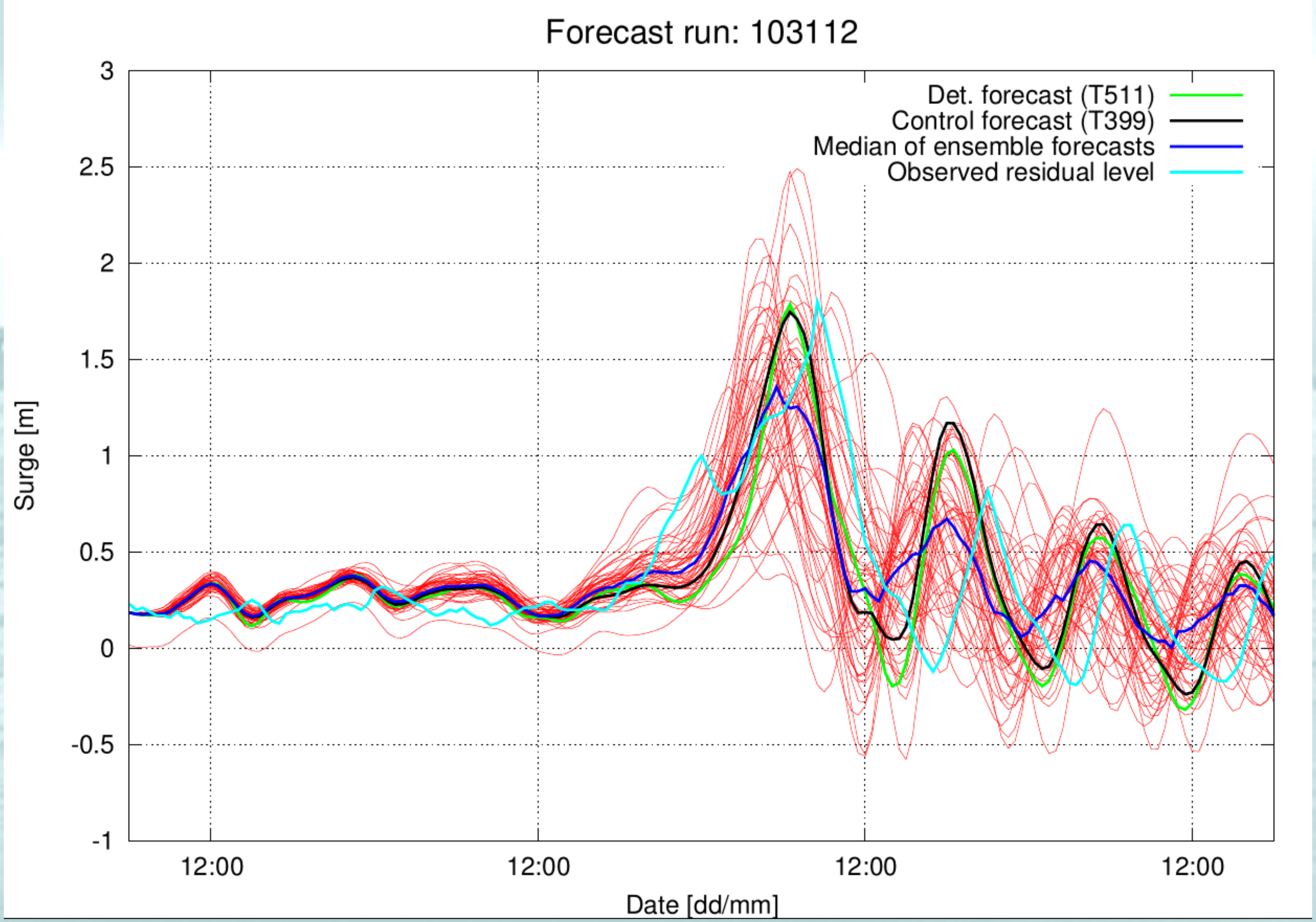
Lo spread deve essere uguale all'errore commesso dal modello, noto a posteriori.



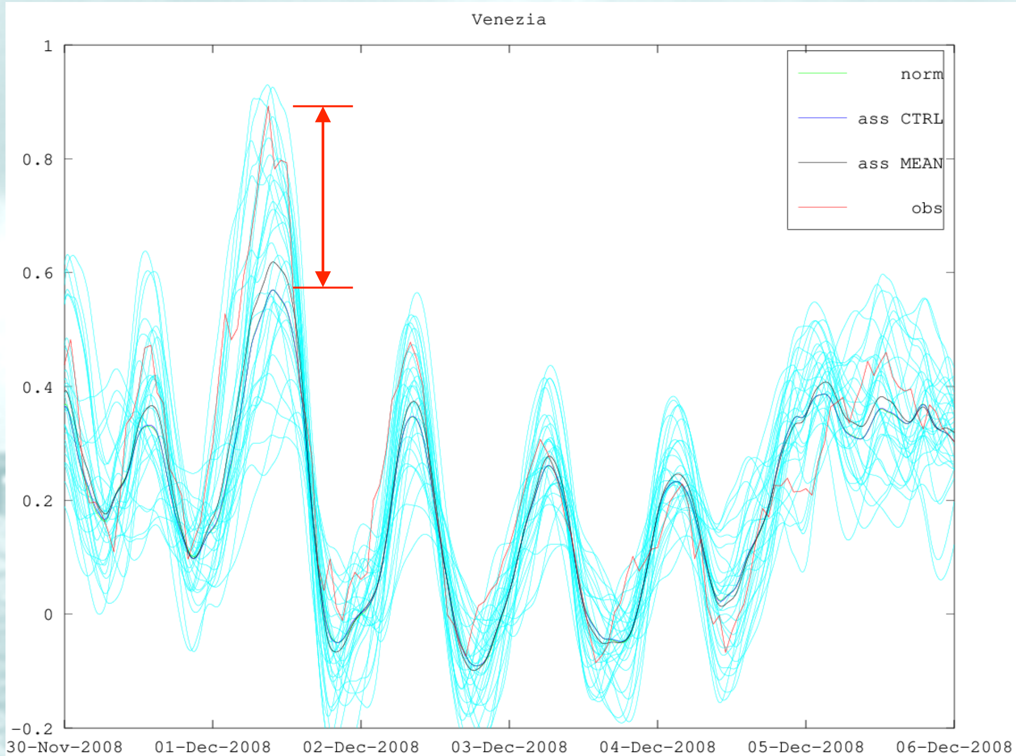
Confronto tra spread e errore (ECMWF)

Metodi di ensemble

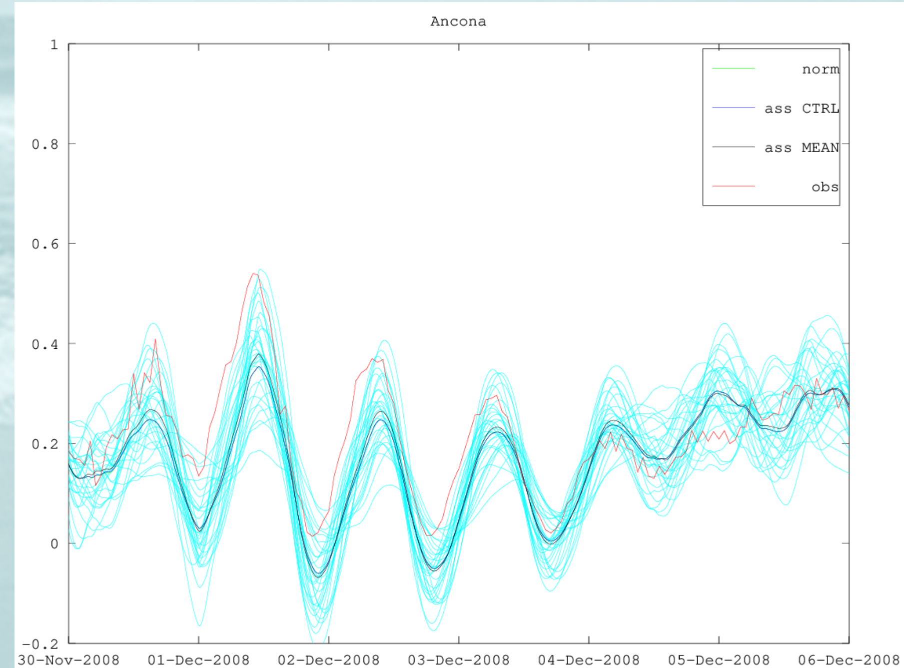
Simulazione dell'evento del 4 novembre 1966 utilizzando un vento di ensemble (rianalisi ECMWF)



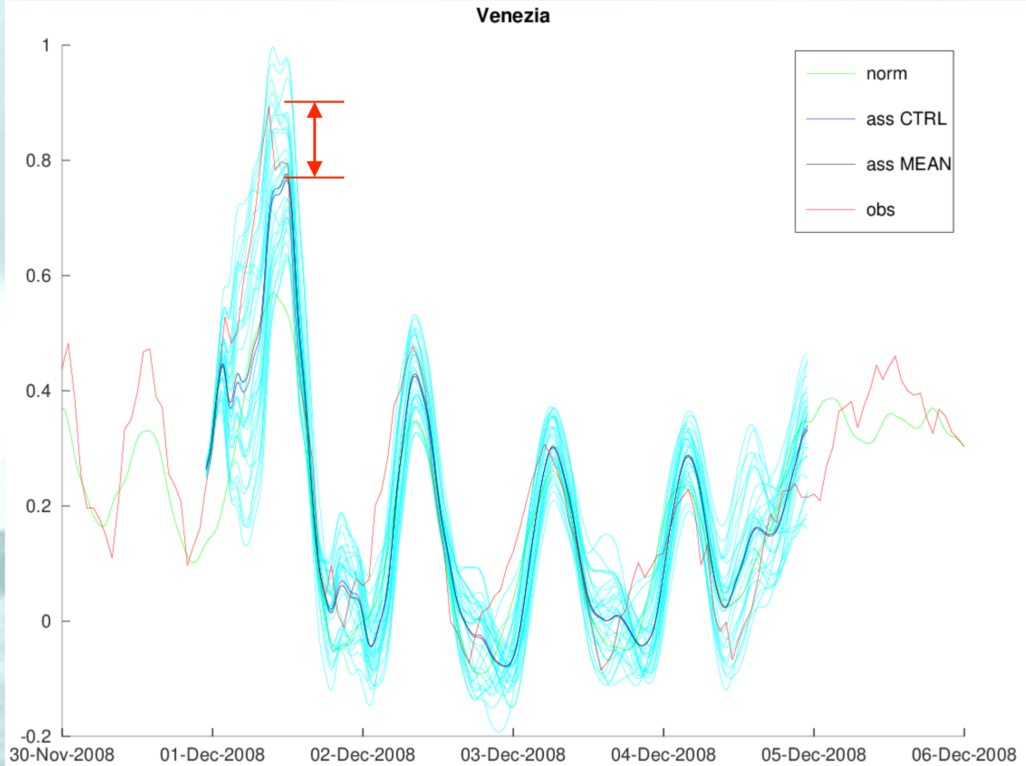
Enseble e assimilazione



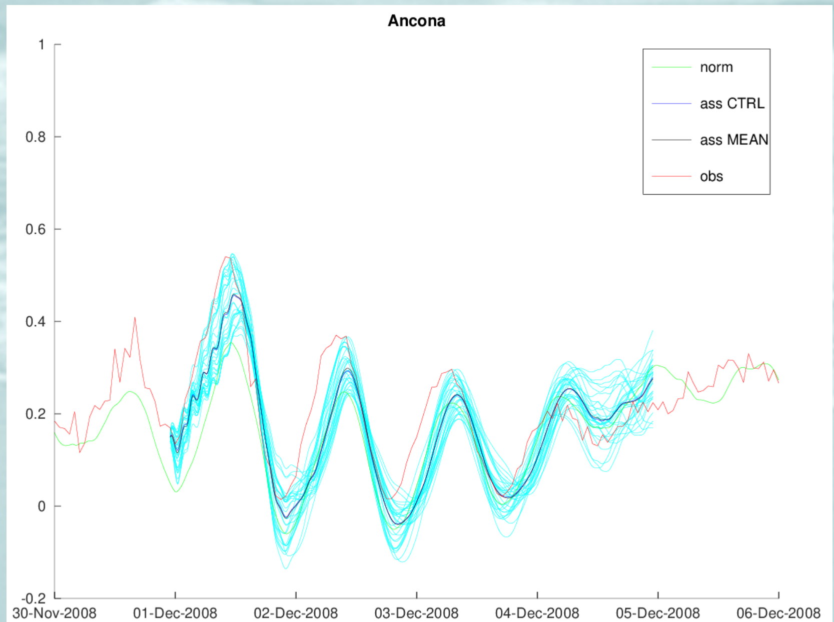
1 dicembre 2008: ensemble di previsioni ottenuto perturbando il vento (azzurro) e previsione tradizionale (verde)



Metodi di ensemble



1 dicembre 2008: simulazioni <u>con assimilazione (enKf)</u> utilizzando lo stesso ensemble di vento.



L'assimilazione dati migliora la previsione e riduce lo spread dell'ensemble.

Minore spread <=> Minore errore a posteriori

Metodi decisionali basati su previsione probabilistica

Esistono medodi matematici basati sull'utilizzo di previsioni probabilistiche per determinare la convenienza di una certa azione.

Esempio di COST-LOSS model:

Il modello prevede con probabilità P un'acqua alta superiore ai 110cm. Bisogna chiudere le barriere?

P = probabilità di allagamento [valori da 0 a 1]
L = costi in caso di allagamento, senza chiusura [euro]
C = costi in caso di chiusura [euro]

$$P*L > C ?$$

Se $P > C/L$ conviene chiudere

Se $P < C/L$ non conviene chiudere

Il beneficio si ha statisticamente su molti casi, se la previsione è affidabile (reliable).

Conclusioni

- La predicibilità di un sistema dipende dalla sua non linearità e dal suo stato iniziale, quindi varia nel tempo;
- E' possibile stimare gli errori di un modello deterministico, classificarli e usarli nell'assimilazione dati;
- I metodi di ensemble forniscono una previsione probabilistica e sono strettamente legati all'assimilazione dati
- E' possibile utilizzare una previsione di ensemble in modelli *cost-loss* per prendere decisioni.

Referenze:

The economic value of ensemble forecasts as a tool for risk assessment: From days to decades. 2002, T. N. PALMER, QJRMS.