Metodi alle differenze finite

I parametri meteorologici che definiscono lo stato dell'atmosfera (es: *u, v, w, T, P, q*) sono campi, cioè funzioni delle variabili indipendenti *x, y, z, t*

Metodo ai punti di griglia: un insieme di punti viene introdotto nella regione di interesse, dove le variabili dipendenti sono inizialmente definite e successivamente calcolate.

ES: $\quad u = u(x), \qquad 0 \leq x \leq L$

$x_j = j\Delta x, \quad j=0,1,2,\ldots.N, \qquad\qquad u(j\Delta x) \equiv u_j$

Metodi spettrali

$$u(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi\, nx}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi\, nx}{L}\right)\right]$$

Nella rappresentazione spettrale l'errore di troncamento sostituisce la mancanza di risoluzione

Esiste una relazione tra la rappresentazione a punti di griglia e quella spettrale. N valori di u_j determinano in modo univoco i seguenti N coefficienti dello sviluppo spettrale:

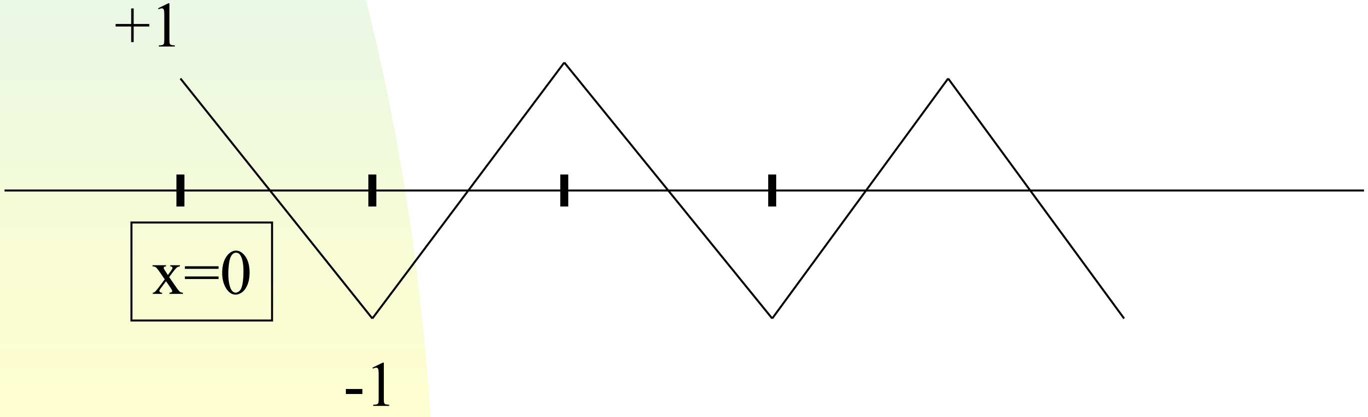
$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots\ldots. \quad a_{N/2}, \quad b_1, \quad \ldots.. \quad b_{N/2-1}$$

Una griglia con N punti risolve $N/2$ componenti spettrali

Metodi spettrali

Il numero d'onda massimo risolto è quindi:

$$K_{MAX} = 2\pi/L * N/2 = \pi/\Delta x$$



Frequenza di Nyquist

Discretizzazione delle derivate

Le derivate spaziali sono approssimate da rapporti tra differenze finite:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_j \approx \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \qquad (forward)$$

$$\approx \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} \qquad (backward)$$

$$\approx \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} \qquad (centered)$$

Tali discretizzazioni sono *consistenti*, cioè l'errore tende a zero al tendere di Δx a zero

Errore di troncamento

Errore di troncamento: ordine di grandezza della differenza tra il valore esatto (analitico) della derivata e la sua rappresentazione numerica

$$u_{j+1} \equiv u(j\Delta x + \Delta x) \cong u_j + \left(\frac{du}{dx}\right)_j \Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_j \Delta x^2$$

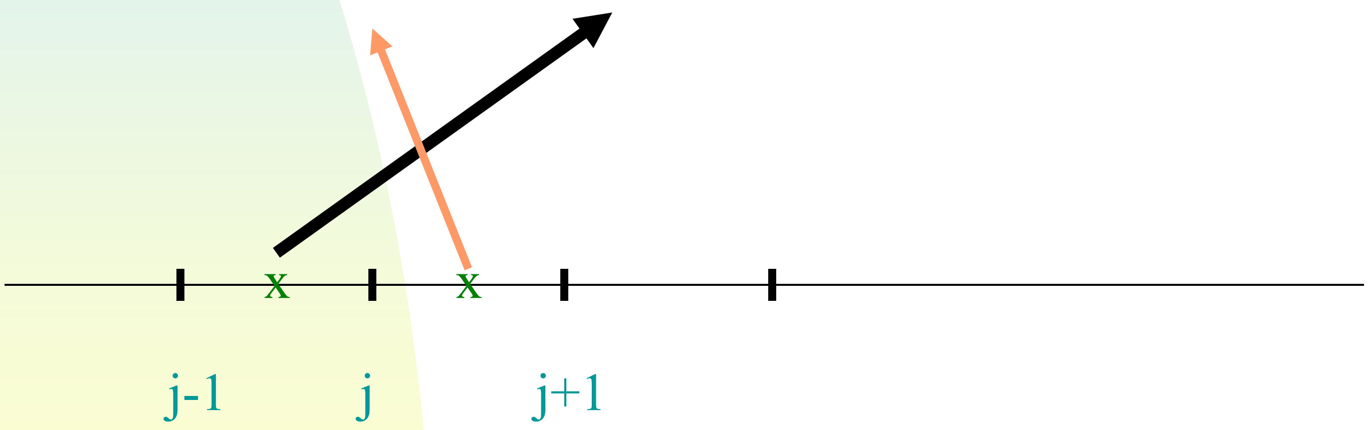
$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} = \left(\frac{du}{dx}\right)_j + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_j \Delta x + O(\Delta x^2)$$

ε

$\varepsilon = O(\Delta x)$ Discretizzazione del primo ordine

Discretizzazione della derivata seconda

$$\left(\frac{u_{j+1}-u_j}{\Delta x}-\frac{u_j-u_{j-1}}{\Delta x}\right)/\Delta x \quad = \quad \frac{u_{j+1}+u_{j-1}-2u_j}{\Delta x^2}$$



Definizione di schema numerico

Le equazioni algebriche, ottenute sostituendo le derivate con le rispettive discretizzazioni numeriche, costituiscono lo schema alle differenze finite

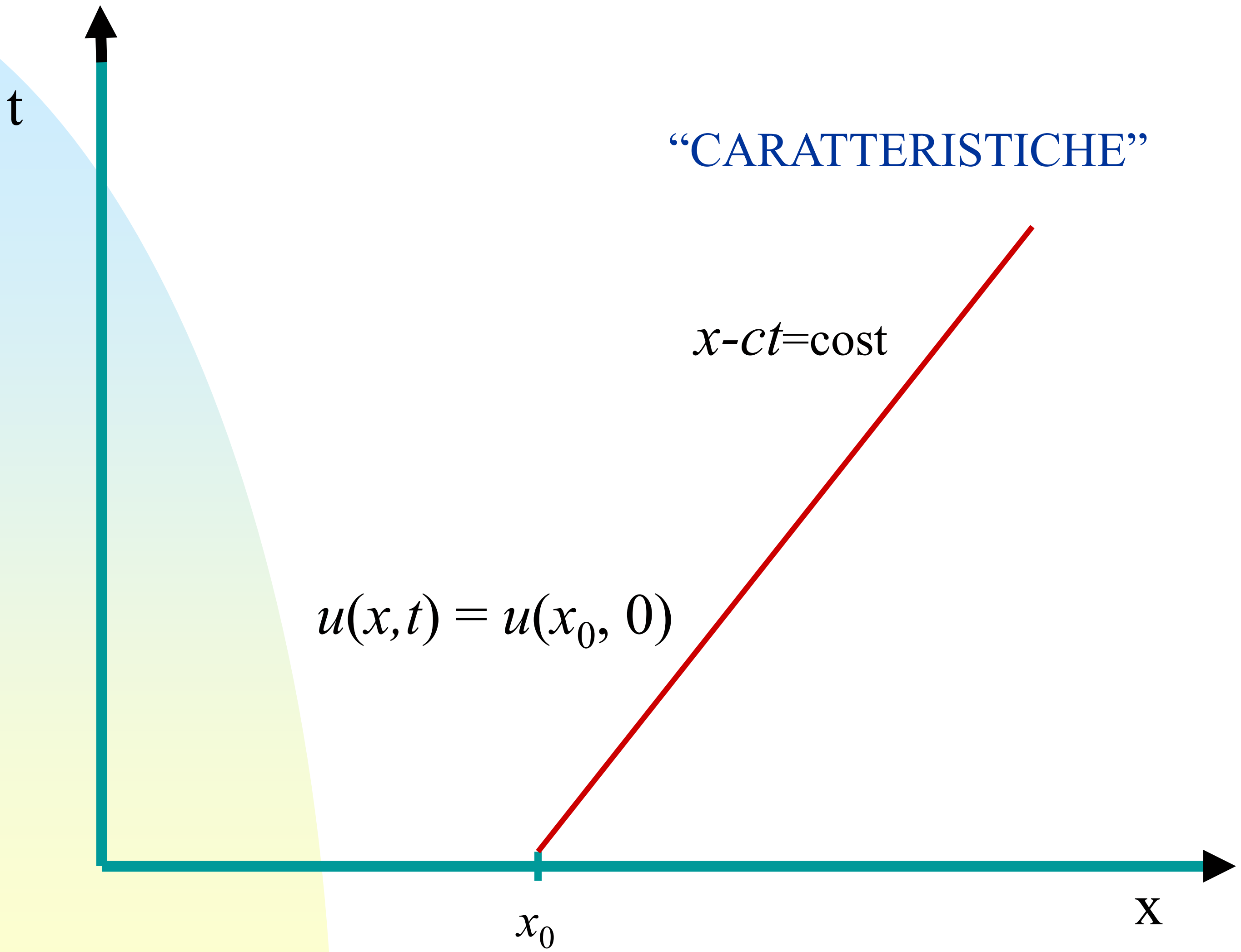
Esempio: equazione di avvezione unidimensionale.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = u(x,t), \quad c \geq 0$$

Soluzione esatta $\qquad u = f(x - ct)$

Se la condizione iniziale è $\qquad u(x,0) = F(x) \quad \Rightarrow$

$u = F(x - ct) \qquad$ è soluzione $\forall\ t$


t
"CARATTERISTICHE"
$x\text{-}ct$=cost
$u(x,t) = u(x_0, 0)$
x_0
x

Schema '*forward-upstream*'

$$u_j^n \equiv u(j\Delta x, n\Delta t)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0, \qquad c \geq 0$$

Ordine dello schema: $O(\Delta x)$, $O(\Delta t)$

Schema del primo ordine nello spazio e nel tempo

Soluzione: $u_j^{n+1} = \Im(u_j^n, u_{j-1}^n)$

Convergenza di uno schema numerico

Convergenza di una soluzione numerica: determinare il comportamento dell'errore

$$u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$$

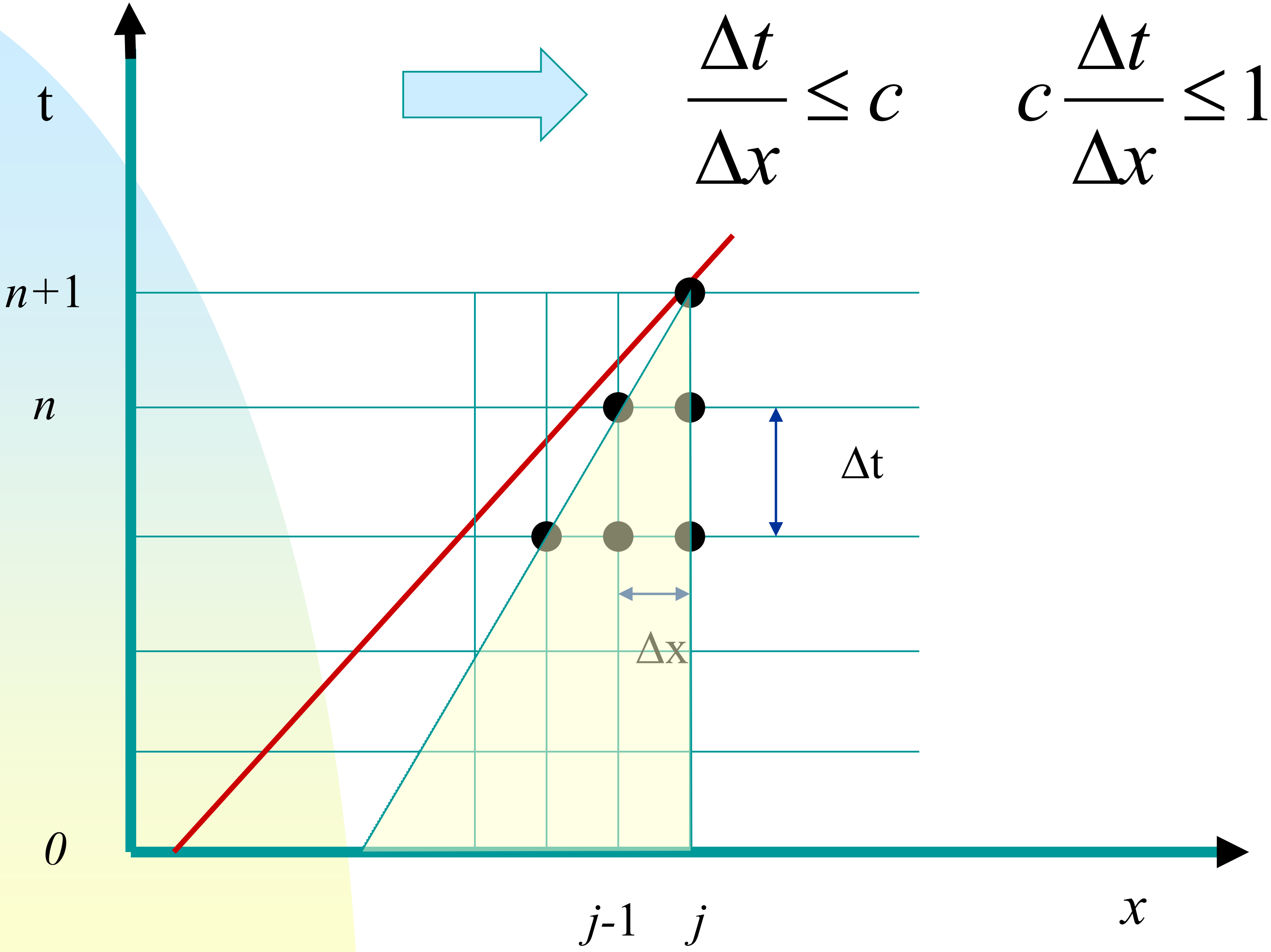
quando, fissato il tempo totale $n\Delta t$, gli incrementi Δx, Δt tendono a zero. Se tale errore tende a zero allora la soluzione si dice convergente

Se lo schema numerico fornisce una soluzione convergente per ogni condizione iniziale

lo schema si definisce convergente

Condizione necessaria per la convergenza

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq c \qquad c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$



Stabilità di uno schema numerico

Studiare il comportamento dell'errore

$$u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$$

per Δx, Δt fissati quando n tende all'infinito

DEF.
se l'errore rimane limitato per n che tende all'infinito lo schema si dice stabile

Stabilità

- Metodo diretto
- Metodo dell’energia
- Metodo di Von Neumann

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\,\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$u_j^{n+1} = (1-\mu)u_j^n + \mu\, u_{j-1}^n, \qquad \mu = c\,\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Metodo diretto

$$\left|u_j^{n+1}\right| \le (1-\mu)\left|u_j^n\right| + \mu\left|u_{j-1}^n\right|, \qquad (1-\mu) \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad Max_j\left|u_j^{n+1}\right| \le Max_j\left|u_j^n\right|$$

Metodo di Von Neumann

Nel caso di equazioni lineari a coefficienti costanti, la soluzione può essere cercata nella forma armonica:

$$u(x,t) = \left\{U_0 \exp\left[i(kx - \omega t)\right]\right\}_{\mathrm{Re}} = \left\{U(t) \exp\left[ikx\right]\right\}_{\mathrm{Re}}$$

Per analogia, nel caso discreto si tenta come soluzione dello schema:

$$\Rightarrow \qquad u_j^n = \left\{U^n \exp\left[ik\ j\Delta x\right]\right\}_{\mathrm{Re}}$$

Sostituendo tale soluzione nello schema numerico si ottiene, in generale:

$$U^{n+1} = \lambda(k)\, U^n, \qquad \lambda \in C$$

$$\left|U^{n}\right| = \left|\lambda\right|\left|U^{n-1}\right| = \ldots\ldots = \left|\lambda\right|^{n}\left|U_{0}\right|$$

da cui segue la condizione sufficiente per la stabilità dello schema:

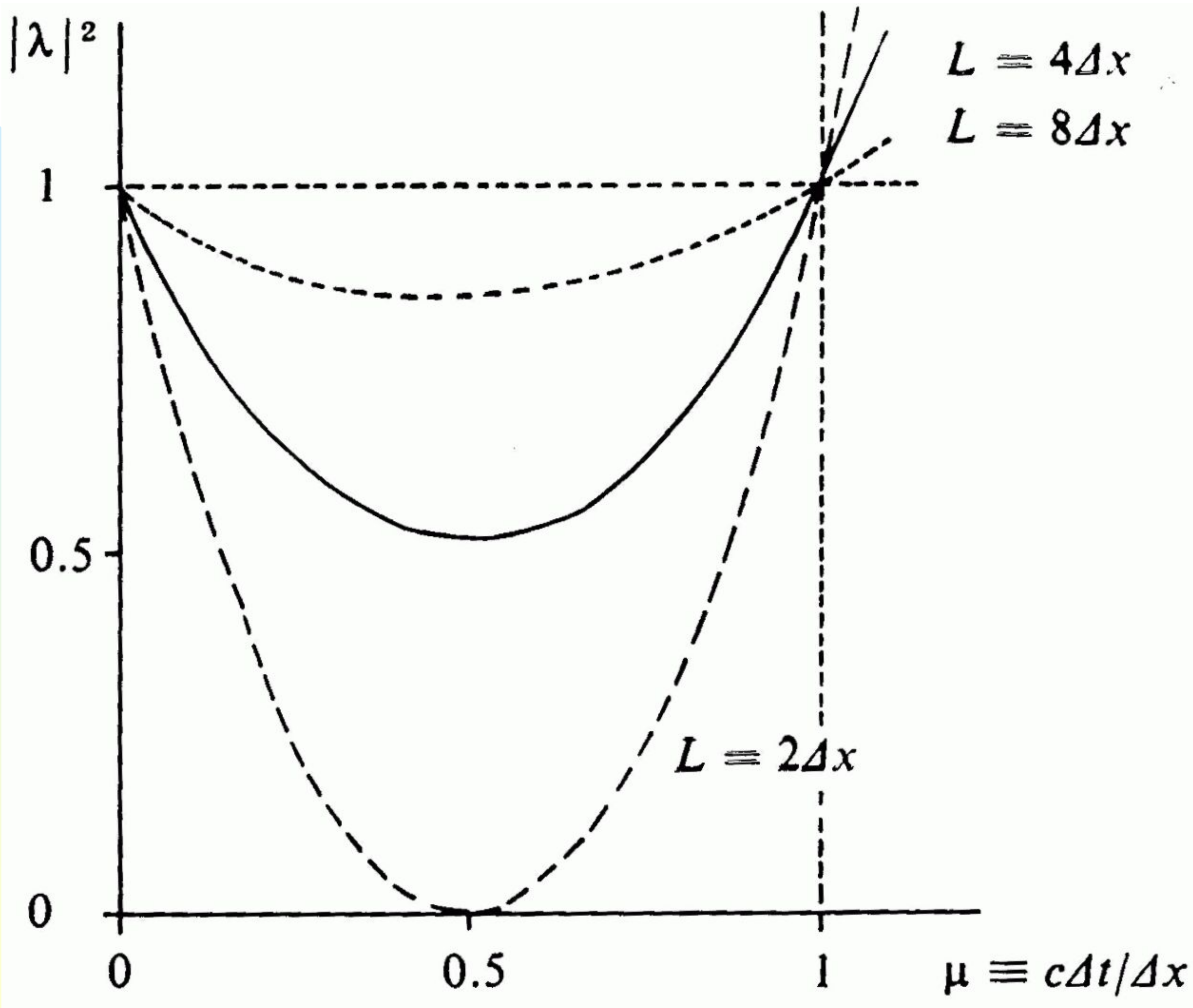
$$\left|\lambda\right| \leq 1$$

Nel caso di sistemi che ammettono soluzioni esponenzialmente crescenti, tale condizione può essere troppo restrittiva. Se si richiede che la soluzione numerica sia limitata per $t = n\Delta t$ fissato, risulta:

$$\left|\lambda\right| < 1 + O(\Delta t)$$

Condizione necessaria per la stabilità (Von Neumann)

Esempio per lo schema forward upstream dell'equazione di avvezione



Dispersione numerica

‘*Diffusione implicita*’

Schema ‘forward-upstream’

$$u_j^n \equiv u(j\Delta x, n\Delta t)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0, \qquad c \geq 0$$

Ordine dello schema: $O(\Delta x)$, $O(\Delta t)$

$$\frac{u_j^{\,n+1} - u_j^{\,n}}{\Delta t} = \left(\frac{du}{dt}\right)_{j,n} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_{j,n} \Delta t + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{u_{j-1}^{\,n} - u_j^{\,n}}{\Delta x} = -\left(\frac{du}{dx}\right)_{j,n} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{j,n} \Delta x + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n}}{\Delta t} + c\,\frac{u_j^{n} - u_{j-1}^{n}}{\Delta x} =$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{j,n} + c\left(\frac{du}{dx}\right)_{j,n} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_{j,n} \Delta t - c\,\frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{j,n} \Delta x +$$

$$O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+c\,\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x}=$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{j,n}+c\left(\frac{du}{dx}\right)_{j,n}+c^2\,\frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{j,n}\Delta t-c\,\frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{j,n}\Delta x+$$

$$O(\Delta t^2)+O(\Delta x^2)$$

$$=\left(\frac{du}{dt}\right)_{j,n}+c\left(\frac{du}{dx}\right)_{j,n}+\frac{c}{2}(c\Delta t-\Delta x)\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{j,n}+O(\Delta t^2)+O(\Delta x^2)$$

‘Diffusione implicita’