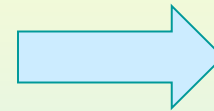


Instabilità nonlineare

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, t)$$

La nonlinearietà diventa sorgente di errore poiché genera, ad ogni time-step, un segnale su scale più piccole, eventualmente non risolte

$$u(x, n\Delta t) \approx \sin(kx)$$



$$uu_x \approx \sin(kx) k \cos(kx) = \frac{k}{2} \sin(2kx)$$

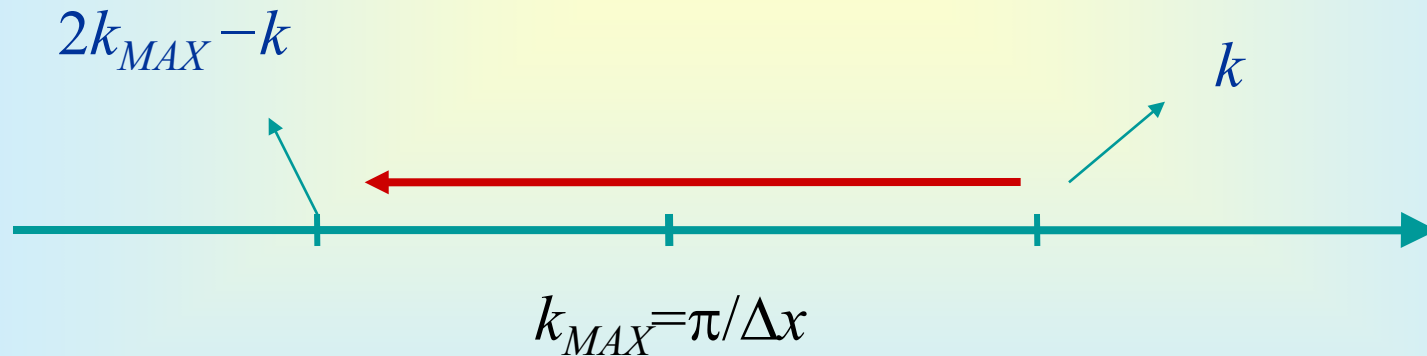
Nei modelli spettrali il segnale prodotto sui numeri d'onda superiori a quello del troncamento viene semplicemente scartato

Nella rappresentazione a punti di griglia il segnale con scale più corte di quelle risolte viene “visto” come segnale su scale più lunghe.

Tale effetto viene indicato col termine *aliasing*

Più precisamente, se $k > k_{MAX}$

$$\sin(kx) \rightarrow -\sin[(2k_{MAX} - k)x]$$

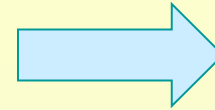


La generazione spuria di energia sulle scale risolte, oltre che sorgente di errore, può essere causa di improvvisa instabilità del codice numerico. Tale instabilità viene indicata come *instabilità nonlineare*

Occorre prendere dei provvedimenti per controllare l'insorgenza di instabilità nonlineare. Il metodo più classico consiste nel costruire uno schema che conservi l'energia della soluzione numerica.

Conservazione dell'energia

$$\int_0^L u(u_t + uu_x) dx = 0$$



$$\frac{d}{dt} \int_0^L \frac{1}{2} u^2 dx = - \int_0^L u^2 u_x dx = 0$$



$$\frac{d}{dt} E = 0$$

Consideriamo il seguente schema numerico, che coinvolge solo la discretizzazione spaziale

$$\frac{du_j}{dt} + u_j \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = 0$$

Analogamente a quanto fatto nel caso del continuo, l'equazione per l'energia si ottiene moltiplicando per u_j e sommando su tutti i punti

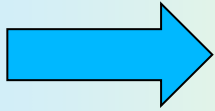
$$\sum_j u_j \left(\frac{du_j}{dt} + u_j \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \sum_j \frac{1}{2} u_j^2 = - \sum_j u_j^2 \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}$$

$$\sum_j u_j^2 \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = \frac{1}{2\Delta x} \sum_j (u_j^2 u_{j+1} - u_{j+1}^2 u_j) \neq 0$$

E' possibile tuttavia definire una discretizzazione altrettanto accurata di quella precedente del termine nonlineare:

$$uu_x = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} u^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2}{2\Delta x}$$



$$uu_x \Rightarrow \alpha u_j \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} + \beta \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2}{2\Delta x}$$

Si possono determinare i coefficienti imponendo la conservazione dell'energia da parte del termine nonlineare:

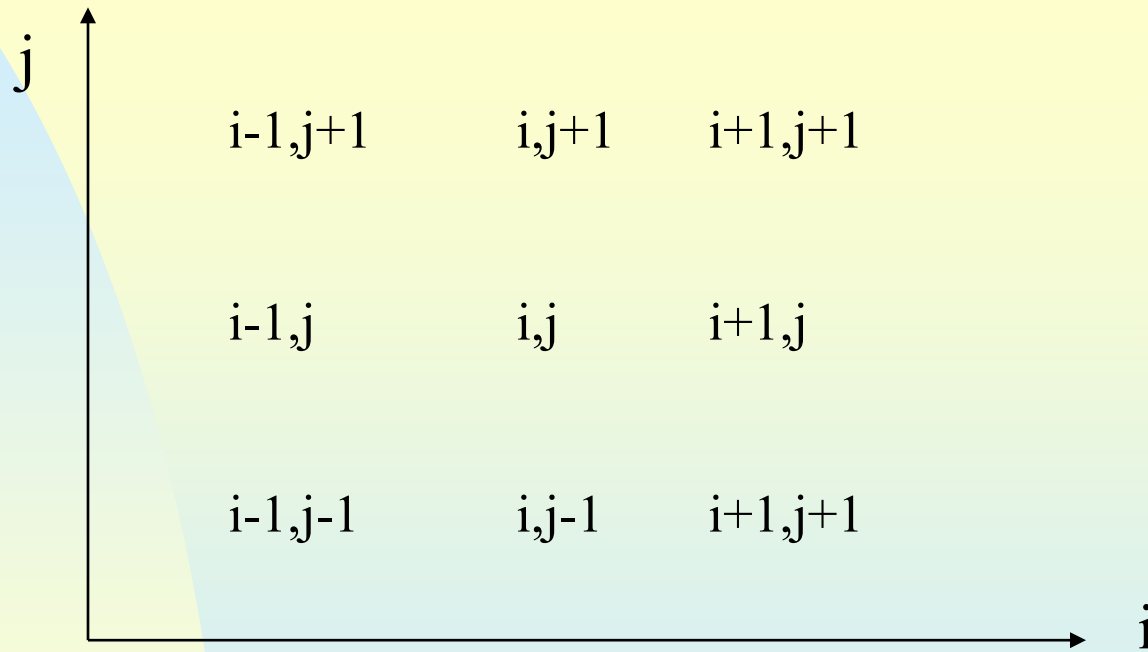
$$\sum_j u_j \left[\alpha u_j \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} + \beta \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2}{2\Delta x} \right] = 0$$



$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{2}{3}$$

Come risolvere il problema senza ricorrere a discretizzazioni complicate?

Filtri digitali:



$$\bar{u}_{i,j} = \frac{1}{16} (u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1} + 2u_{i-1,j} + 2u_{i+1,j} + 2u_{i,j-1} + 2u_{i,j+1} + 4u_{i,j})$$

$$u_{i,j} \Rightarrow (1 - \alpha) u_{i,j} + \alpha \bar{u}_{i,j}$$

$$0 < \alpha < 1$$

Divergence damping

- Divergence damping diffuses the divergent part of the flow

$$\frac{\partial \vec{v}_h}{\partial t} = -\Omega_a \vec{k} \times \vec{v}_h - \nabla(\Phi + K - cD) \quad (\text{SW equation})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}_h}{\partial t} = \dots + \nabla(cD)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \frac{\partial \vec{v}_h}{\partial t} = \dots + \nabla \cdot \nabla(cD) \quad \text{Apply divergence operator}$$

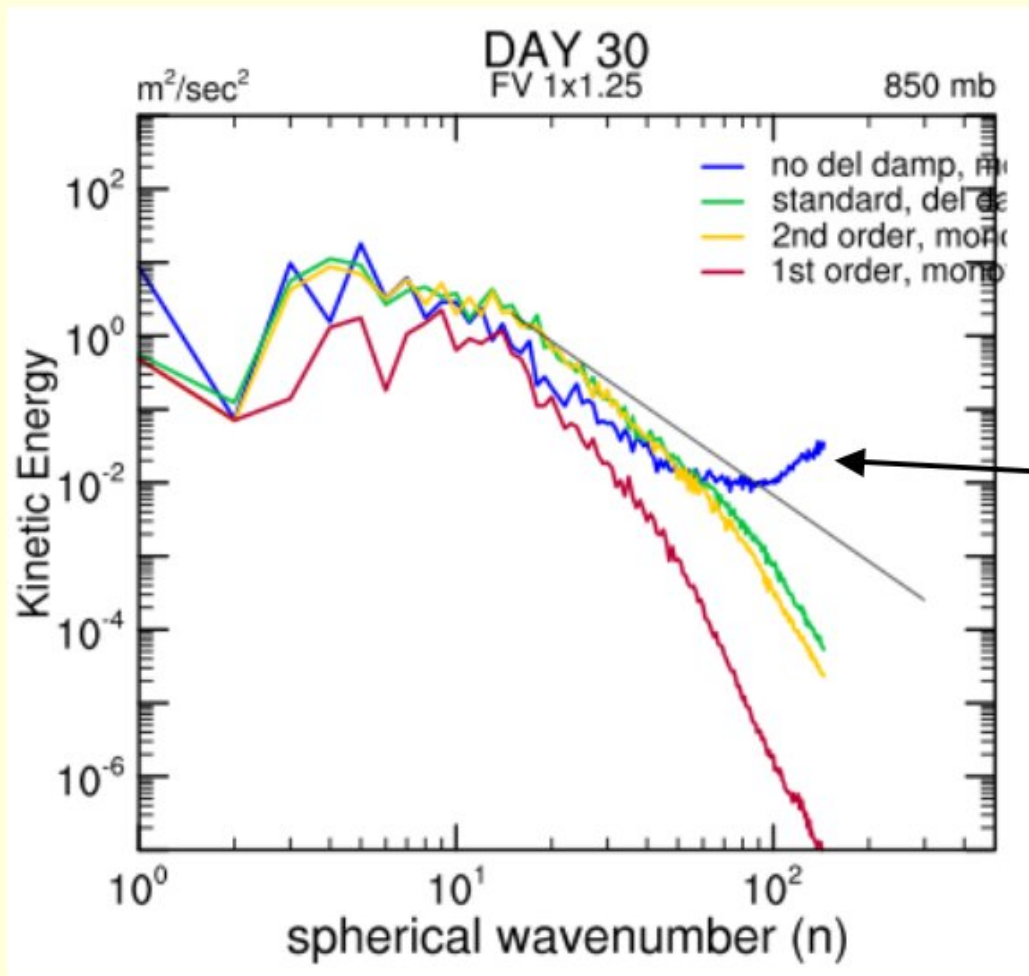
$$\Leftrightarrow \frac{\partial D}{\partial t} = \dots + \nabla^2(cD) \quad \text{with } D : \text{horizontal divergence}$$

2nd order
diffusion

Spatially variant divergence
damping coefficient, units m^2/s

Divergence Damping

- Effects of the divergence damping and order of accuracy on the Kinetic Energy spectrum (test 2-0-0)



Blue: PPM, **no** divergence damping

Green: PPM, standard divergence damping

Accumulation of energy at small scales without divergence damping

Model: CAM FV,
plot provided by
D. Williamson (NCAR)

Schemi temporali usati nei modelli meteorologici

- Centrati, forward, backward
- Espliciti o impliciti
- Due o 3 livelli temporali
- N-cycle
- Schemi di ordine superiore
- Time splitted

3 livelli temporali: schema centrato 'leapfrog'

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u)$$

$$u^{(n+1)} = u^{(n-1)} + 2\Delta t A(u^{(n)})$$

Schema temporale 'time-splitted'

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u) + D(u)$$

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \Delta t \left[A(u^{(n)}) + D(u^{(n)}) \right] \quad \text{Euler-forward}$$

$$u^* = u^{(n)} + \Delta t A(u^{(n)})$$

$$u^{(n+1)} = u^* + \Delta t D(u^*)$$

Time-splitted